

René Lew,
les 2 mai 2015,
Le schématisme borro-projectif,
15ème livraison

À propos de la construction de l'immersion ternaire du plan projectif par Werner Boy

Avant de commenter cette construction je donne ici la traduction (effectuée sur l'anglais) du chapitre que Walter Lietzmann consacre à cette construction.¹

1. La surface de Boy

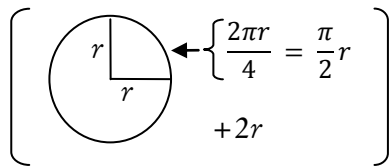
« Werner Boy a décrit dans sa thèse, soutenue à l'Université de Göttingen, un modèle clos fini de plan projectif. Il paraît bien plus compliqué que ceux décrits dans les précédents paragraphes [relatifs au *cross-cap*], mais présente l'avantage de ne pas posséder de points singuliers. Dans la construction de ce modèle nous suivons les indications de son découvreur.²

Nous allons construire le modèle dans un système rectangulaire de coordonnées spatiales. Deux plans à angle droit, passant par l'axe d'un cylindre circulaire de rayon r , divisent le cylindre en quatre quadrants dont les faces terminales sont des quadrants de cercle. Le périmètre de l'une de ces faces d'extrémité est donc

¹ W. Lietzmann, *Visual Topology*, trad. angl. éd. Chatto & Windus, Londres, 1965.

² Une dérivation [je maintiens le franglais qui renvoie à ce que j'ai travaillé en 2013-2014, cf. R.L., *Dérive et dérivations*, Lysimaque] différente de la surface de Boy — qui est [alors] connectée à la construction des surfaces décrites dans les paragraphes précédents, mais qui utilise l'hexagone à la place du carré ici utilisé — est donnée par D. Hilbert et S. Cohn-Vossen, [je précise l'éd. anglaise] *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, p. 319 *sqq.*

$$2r + \frac{\pi}{2}r = l.$$



Maintenant prenons trois de ces quadrants de cylindre circulaire de longueur l et supposons qu'ils sont faits de plasticine, disons, et posons les dans le système de coordonnées de façon que dans chaque cas l'axe du cylindre coïncide avec l'axe de coordonnée négative et coupe de l'origine au point $-l$.

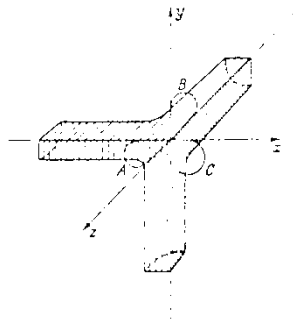
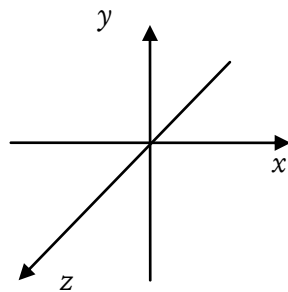
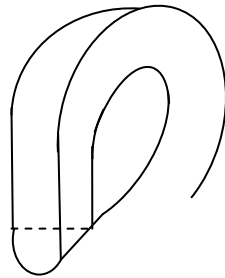
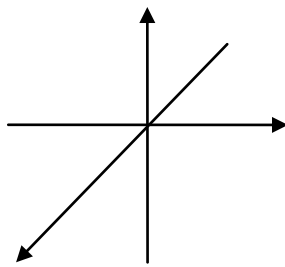
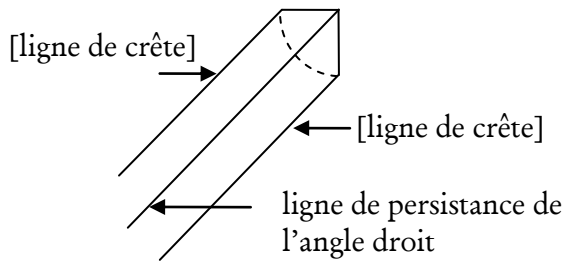


Fig. 1

Les surfaces sont positionnées de telle façon que toutes les trois tombent dans l'« octant »³ dans lequel la coordonnée de chacune des trois est négative. Leur situation est dépeinte dans la fig. 1. Dans cette figure, trois faces d'extrémité A , B et C sont aussi dessinées comme posées dans trois plans coordonnés, de manière telle que les angles droits se trouvent à l'origine.



³ [Une tripartition duelle d'espace 3D implique $2^3 = 8$ « quadrants » d'espace.]



La circonférence de la face A touche l'axe positif des z et l'axe négatif des x , celle de la face B touche l'axe positif des y et l'axe négatif des z , celle de la face C touche l'axe positif des x et l'axe négatif des y .

Les trois quadrants de cylindre circulaire sont faits pour se pénétrer les uns les autres à l'origine : les morceaux de chacun qui se trouvent à l'intérieur d'un autre sont enlevés. [Ce sont là les faces d'extrémités en quart de disque qui sont enlevées : chaque quart de cylindre ainsi recourbé jusqu'à l'origine débouche dans la jonction des deux autres.] Les frontières ainsi formées sont jointes et les arêtes et les sommets sont arrondis. La structure tripode qui en résulte a un axe de symétrie triplement recourbé qui est perpendiculaire au plan $x + y + z = 0$ [constitué du recourbement d'un autre, donc doublement perpendiculaire avec chacun des deux autres déjà perpendiculaires entre eux].

Maintenant prenons le quadrant [devenu] cylindrique (ou « tube ») qui se situe dans la direction de l'axe négatif des z et courbons le circulairement de manière que l'axe du cylindre originel prenne la position de la circonférence de B , et que la surface d'extrémité du tube coïncide avec A . Il est maintenant clair pourquoi nous avons choisi une longueur l du cylindre.

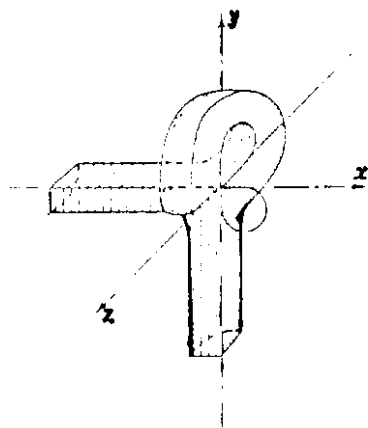


Fig. 2

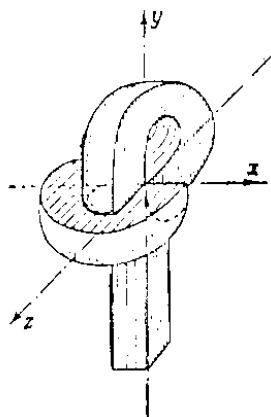


Fig. 3

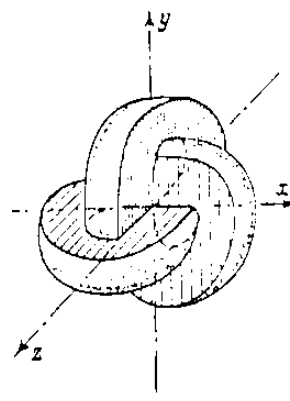


Fig. 4

La fig. 2 décrit ce qui est arrivé. Le tube se tenant dans la direction de l'axe négatif des x est courbé de semblable façon autour de la face A du premier tube de telle sorte que son ancienne face d'extrémité coïncide avec C (fig. 3). Finalement le troisième tube, qui se tient dans la direction de l'axe négatif des y , est courbé autour de la face C de telle façon que sa face d'extrémité s'adapte exactement sur B . Cela complète la surface de Boy montrée à la fig. 4.

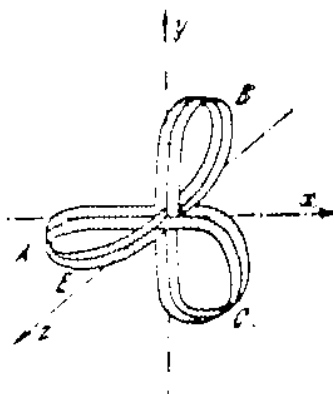
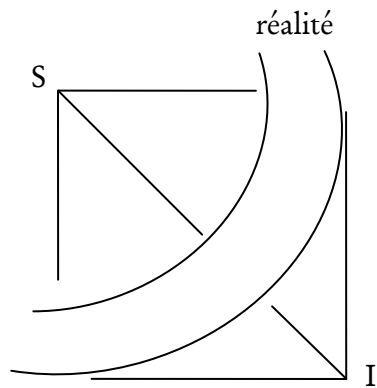


Fig. 5

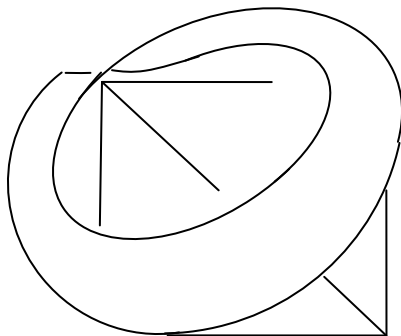
Afin de montrer le chemin d'une coupure rétrogradante qui rendrait évidente l'unilatéralité de la surface, nous abandonnons la surface elle-même et nous examinons la bande de la figure qui contient la coupure. Nous suivons une normale à la surface le long de la coupure, commençant au point E , disons, sur l'extérieur [ou la face externe] de la courbe A en allant vers l'origine. À l'origine la normale tourne à angle droit et nous continuons à l'intérieur de B en retournant vers l'origine. Là la normale tourne à angle droit et nous passons sur l'extérieur de C vers l'origine. Le chemin continue à l'intérieur de A (ce qui prouve l'unilatéralité de la surface) en retournant vers l'origine, sur l'extérieur de B vers l'origine, sur l'intérieur de C vers l'origine et finalement sur l'extérieur de A où, en ayant traversé les trois boucles deux fois chacune, nous retournons à notre point de départ E . »

2. Prise en compte du schématisme borro-projectif à la façon de Boy

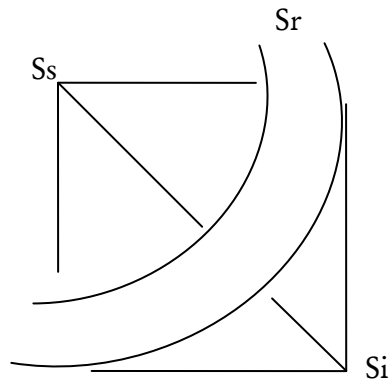
Je laisse de côté la connivence de la surface de Boy avec le nœud 3-borroméen, pour souligner la triade R, S, I du plan projectif comme je l'utilise après Lacan.



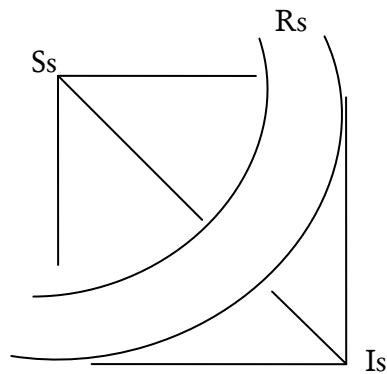
La bande de la réalité n'est telle que dans le plan projectif mis à plat et entièrement considéré depuis l'imaginaire prédictif de l'ontologie. Auquel cas le symbolique est lui-même réalisé comme prédictif et mon schématisme borro-projectif



est entièrement inadéquat. Par contre, si l'ensemble est vu hors point de vue, et particulièrement sans que le point de vue ontologique soit prévalent, alors le réel est celui du symbolique (asphérique, dialectique, littoral, récursif) et l'imaginaire de même,

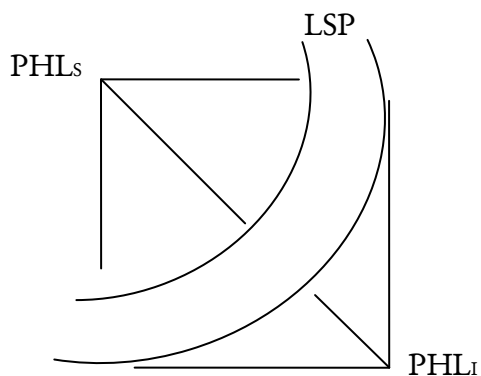


voire

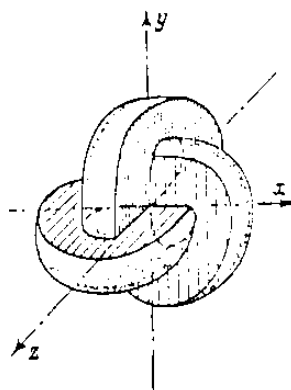


Dans ce cas le symbolique définit le principe commun de ce schématisme *sans singularité*. Je vais donc ici contre le propos que je tiens par ailleurs où je parle de l'opposition entre le point focal (et polaire) de la surface de Boy et son point triple. Mais ce qui est à retenir, c'est que réel, imaginaire et symbolique sont bien homogènes, dans le modèle de la surface de Boy comme dans le nœud borroméen. Alors le passage de la récursivité à l'anti-récursivité et vice versa n'a nul besoin d'utiliser la particularité asphérique de la bande diagonale : chacun de ces registres est à la fois homogène et hétérogène aux autres, sphérique et asphérique. C'est ce que démontre Lietzmann dans son dernier paragraphe. Car, si chaque portion de bande homogénéisant ainsi méridiens et parallèles du plan projectif est bien bilatère, l'ensemble des trois — du fait d'un spin tournant à angle droit à chaque passage par l'origine du système triple de coordonnées, elles-mêmes perpendiculaires chacune aux deux autres —, l'ensemble est unilatère, c'est-à-dire asphérique, car le discours de Lietzmann adopte un point de vue extrinsèque passant (par chiasmes) des « normales » à un point de vue intrinsèque, c'est-à-dire une absence de point de vue. Dès lors chacune des positions que je distingue par ailleurs comme bilatère (point hors ligne extensible de manière sphérique) ou unilatère (ligne sans point réductible depuis

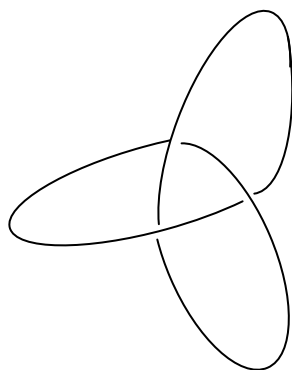
l'asphérique) est identifiable l'une avec les autres. Aussi le schéma borro-projectif calqué du schéma R



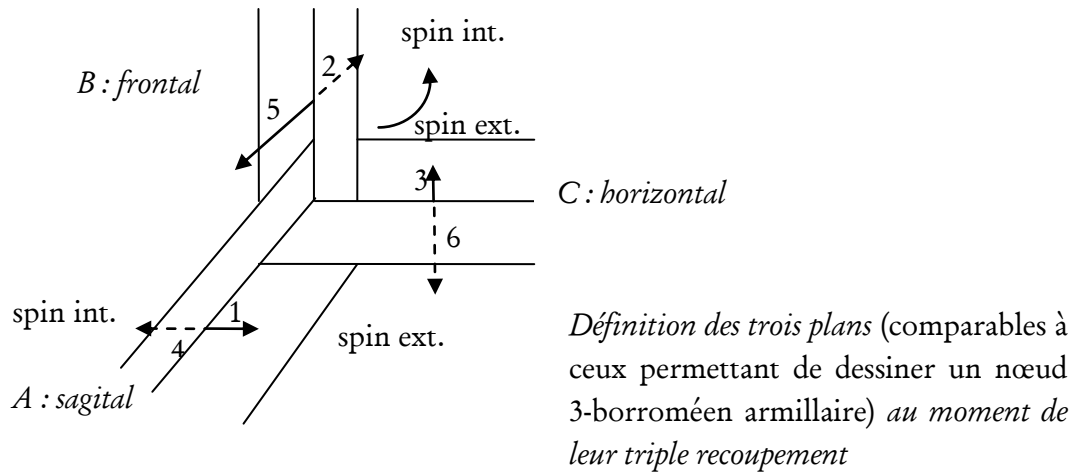
est-il critiquable de ne pas donner une image d'identification correcte entre ces trois champs à l'identique, en limitant l'identification de chacun des deux champs sphériques au champ asphérique qui les identifie en les faisant passer par l'asphéricité à laquelle *l'ensemble des trois* aboutit. Ainsi un schéma comme celui-ci



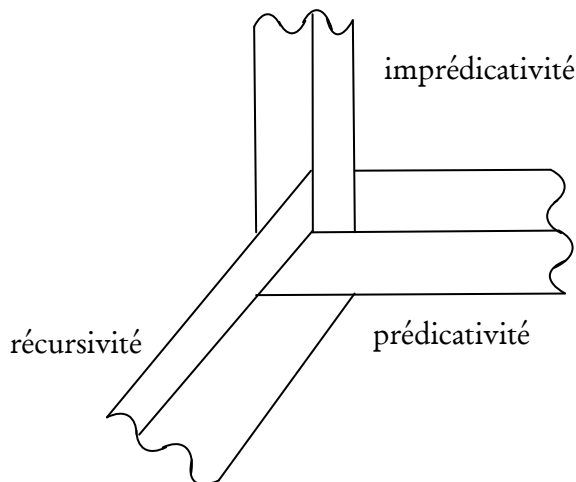
est-il bien préférable. Je le remanie ainsi en nœud trèfle,



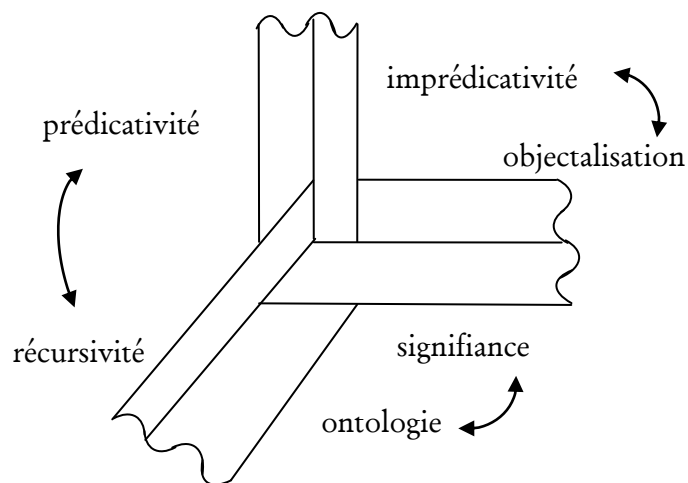
de façon à réduire le triskel central à un point (triple et même doublement triple, puisque chacun des chemins axiaux est composé de points doubles à la fois internes et externes). Au plus direct cela donne :



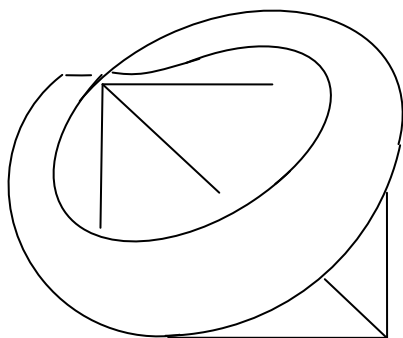
Un tel recoupement est bien asphérique de passer de l'un à l'autre de ces plans par quart de tour (angle droit). Aussi je donnerai plutôt ainsi le point triple de la surface de Boy (quitte pourtant à maintenir un schéma borro-projectif que je standardise selon le schéma R) :



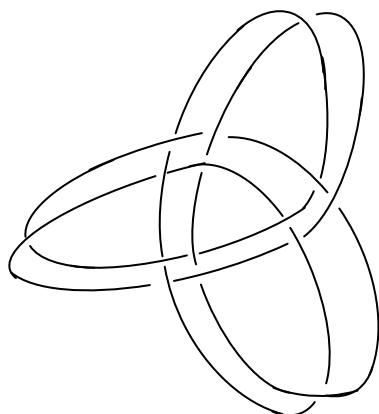
ou encore :



Plutôt que la demi-torsion de la bande de Moëbius dans le schéma RL (type R)



trois quarts-de-torsion dans un schéma BrL (type Boy) permettant d'identifier récurtivité, imprédictivité et signifiante (fonction Père, fonction de la castration, parole) et ontologie, prédictivité et objectalisation (et plutôt objectivation). Cela se donne ainsi — façon (*i. e.* sans exact dédoublement) double nœud trèfle (organisé sur une bande trimœbienne de même que la surface de Boy).



Ce qui appelle à resserrer le triskel central pour aboutir aux schémas reprenant la figure 4.

N. B. Jean-Pierre Petit dessine sur chaque boucle du trèfle auto-croisé (et auto-pénétrant) deux demi-torsions, soit *six* (sans parler de l'interpénétration des trois boucles entre elles). Or c'est le quart de tour de Boy qui autorise, dans le système de plans normaux les uns aux autres, le passage d'une boucle à l'autre. La structure asphérique est là sans la nécessité de la porter sur les boucles un nombre trop conséquent de fois. Comment en rester à une bande de Mœbius triple associée à un disque pour dessiner la surface de Boy ? Je reprendrai cette discussion lors d'une autre livraison.⁴

⁴ C'est repris dans la série suivante (débutée en juillet 2015), intitulée *L'angoisse comme coupure* et ayant trait essentiellement aux formalisations, en particulier topologiques, de la récursivité.