Mémo 3.4

Sur les surfaces intrinsèques

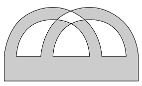
Définition

(dérivée de celle donnée par JMV dans ETOFFE p.69)

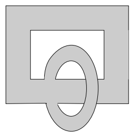
La surface "intrinsèque" d'une surface (S) ayant un noeud comme bord consiste en un disque muni d'un certain nombre de bandes (avec ou sans demi-torsion, croisées ou non) de telle façon que cette surface "intrinsèque" ait le même nombre de composants du bord (cp), la même caractéristique d'Euler (k), le même genre (G) et le même type d'orientabilité que la surface (S) donnée.

Surface intrinsèque et surface close correspondante

- Lorsqu'on troue un tore - bouée (2D) et non pas baba au rhum (3D) - en prélevant une unique rondelle dans sa surface, on obtient une surface équivalant à un disque munie de 2 bandes croisées.



ou

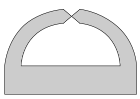


tore troué (une fois)
cf J-M.V Etoffe p.81 et Kauffman : On Knots p.181

Le tore troué est orientable. Il conserve le genre du tore G = 1. On sait qu'un trou effectué dans une surface diminue sa caractéristique d'Euler de 1. La caractéristique d'Euler du tore troué est donc celle du tore diminuée de 1 soit 0 -1 = -1. Enfin, le tore troué n'a qu'un seul composant de bord.

Le tore troué est donc la surface intrinsèque de toutes les surfaces orientables de genre G = 1, de caractéristique k = -1 et ayant un seul composant de bord. La surface close "correspondante" est le tore.

- Lorsqu'on troue un plan projectif en prélevant une unique rondelle, on obtient une surface équivalant à un disque munie d'une bande avec une 1/2 torsion.



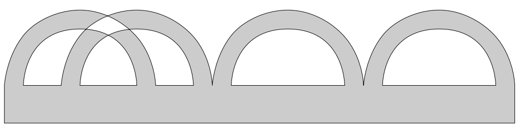
plan projectif troué une fois = bande de Moebius (BM)

cf J. Lacan Sém. IX 13/6/62

Le plan projectif troué n'est pas orientable. Il conserve le genre du plan projectif G = 1. La caractéristique du plan projectif troué (BM) est celle du plan projectif diminuée de 1 soit 1 -1 = 0 et enfin, le plan projectif troué (BM) n'a qu'un seul composant de bord.

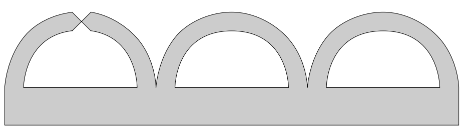
Le plan projectif troué (BM) est donc la surface intrinsèque de toutes les surfaces ayant un noeud comme bord qui sont non-orientables, de genre G = 1, de caractéristique k = 0 et ayant un seul composant de bord. La surface close "correspondante" est le plan projectif.

- Lorsqu'on augmente le nombre de trous, chacun des trous suivants rajoute une bande sur le disque. On aura par exemple :



tore troué 3 fois

G = 1
k = -3
cp = 3



plan projectif troué 3 fois

G = 1
k = -2
cp = 3

- Inversement, lorsqu'on bouche (obture) les trous des surfaces intrinsèques par des disques, on obtient les surfaces closes (fermées) qui "correspondent" à ces surfaces intrinsèques.

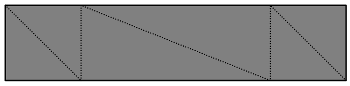
<u>Caractéristique d'Euler d'une surface intrinsèque</u>

Si a est le nombre de bandes (avec ou sans demi-torsion, croisées ou non)
on a

$\boxed{K = 1 - a}$ voir W. S. Massey Algebric Topology: An Introduction p.43

En effet

triangulation du disque

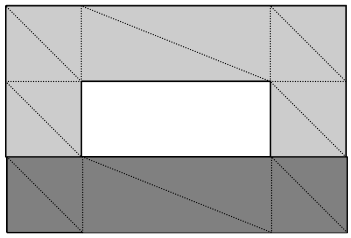


1) Caractéristique d'Euler d'un disque = 1

k = nb sommets des triangles (S)
- nb côtés des triangles (A)
+ nb de triangles (F)

k = S - A - F = 8 - 13 + 6 = 1

triangulation
disque (foncé) + bande (plus claire)



2) Caractéristique d'Euler d'un disque muni d'une bande :

K = S - A - F = 16 - 32 + 16 = 0

Autrement dit, lorsqu'on ajoute la bande au disque, on rajoute 8 sommets, 19 côtés et 10 triangles
la caractéristique de l'ensemble disque + une bande diminue donc de 1

$\Delta = 8 - 19 + 10 = -1$

Et donc lorsqu'on ajoute un nombre a de bandes à un disque la caractéristique du disque (= 1) diminue de a

Soit : caractéristique d'Euler K de l'ensemble disque + a bandes

$$\boxed{K = 1 - a}$$

<u>Caractéristique d'Euler d'une surface ayant un noeud comme bord</u>

La surface insérée dans un noeud (spanning surface) se compose d'un certain nombre de disques (égal au nombre de cercles du réseau du noeud) et d'un certain nombre de bandes (égal au nombre de croisements) reliant les disques entre eux.
Chaque disque de caractéristique d'Euler = 1 contribue pour 1 dans la caractéristique d'Euler de la surface et chaque bande de liaison fait baisser la caractéristique d'Euler de 1.
On a par conséquent :
Caractéristique d'Euler de la surface = nombre de cercles du réseau (c) - nombre de croisements (cr)

$$\boxed{K = c - cr}$$

voir les exemples p. 3 et p.4

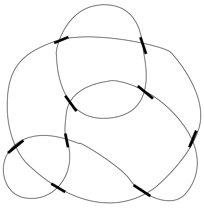
<u>Genre d'une surface intrinsèque</u> voir Knots and Surfaces Gilbert and Potter p.87

Surface orientable : G = 1/2 (2 - k - cp)

Surface non orientable : G = 2 - k - cp

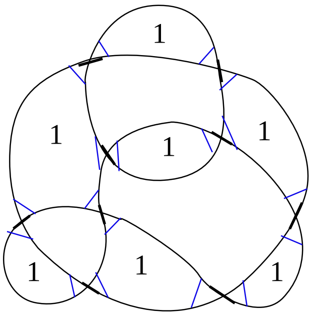
Exemple: Les surfaces intrinsèques du noeud 9.3.1

9^3_1

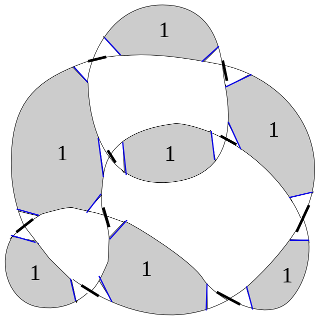


I Surfaces non orientables

1) Surface insérée dans le "réseau des 1" (= surface d'empan)



réseau des 1



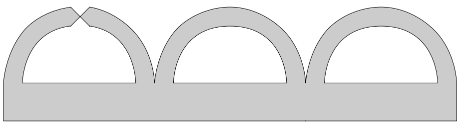
(non orientable)

$k_1 = 7 - 9 = -2$

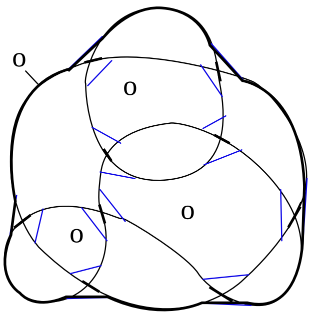
$G = 2 + 2 - 3 = 1$

nombre de cercles des pleins (zones 1) : = 7

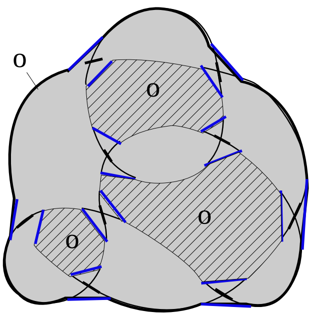
la surface intrinsèque est donc, ici, un plan projectif (G=1) troué trois fois (cp = 3)



2) Surface insérée dans le "réseau des o" (= réseau des zones vides) (non orientable)



réseau des o



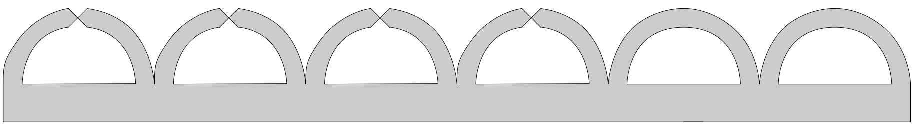
(non orientable)

$k_o = 4 - 9 = -5$

$G = 2 + 5 - 3 = 4$

nombre de cercles des zones vides (zones o) : = 4

la surface intrinsèque est donc, ici, un 4-plan projectif (G=4) troué trois fois (cp=3)



on a bien

$k_o = 1 - a = 1 - 6 = -5$

a : nb de bandes

Remarque :

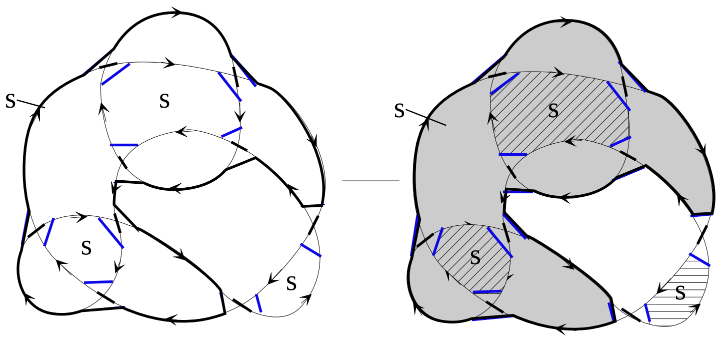
On sait (NOEUD p.137) que : nombre de zones vides (V) + nombre de pleins (P) = 2 + nombre de croisements

d'où $\boxed{k_1 + k_o = 2 - \text{nombre de croisements}}$ et l'on vérifie que - 2 - 5 = 2 - 9

II Surfaces de Seifert (orientables)

1) Orientations 1 et 2 du trajet du noeud

9_1^3

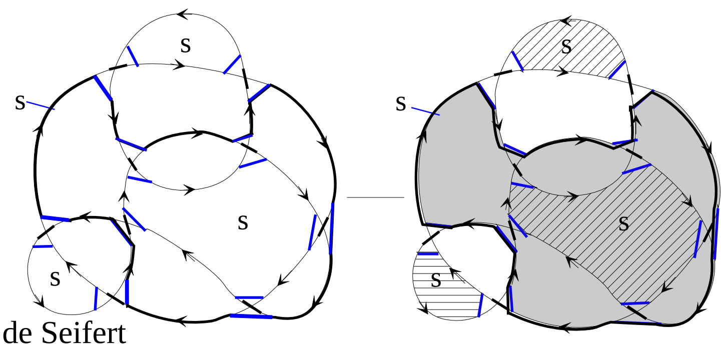


réseau de Seifert

nombre de cercles de Seifert = 4

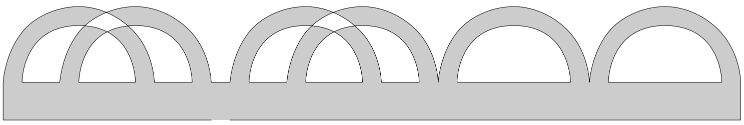
k = 4 - 9 = -5

G = 1/2 (2 +5 -3) = 2



réseau de Seifert

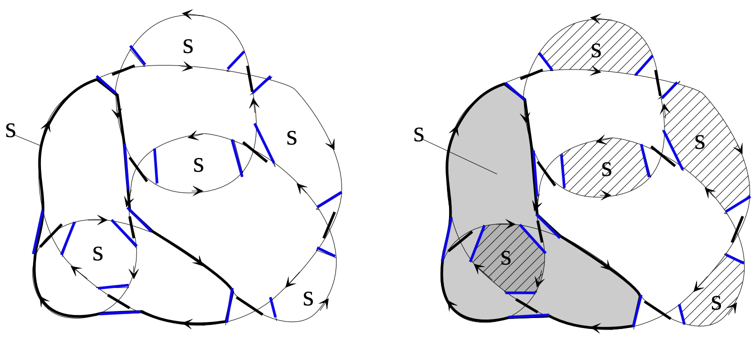
la surface intrinsèque des 2 surfaces est donc, ici la même à savoir un 2-tore (G=2) troué trois fois (cp = 3)



on a bien :
k = 1 - a = 1 - 6 = -5

a : nb de bandes

2) Orientation 3 du trajet du noeud



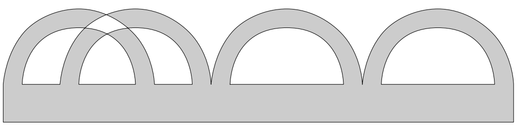
réseau de Seifert

nombre de cercles de Seifert : = 6

k = 6 - 9 = -3

G = 1/2 (2 +3 -3) = 1

la surface intrinsèque est donc, ici, un tore (G=1) troué trois fois (cp = 3)



on a bien :
k = 1 - a = 1 - 4 = -3

a : nb de bandes