

ETOFFE p.71 **Opération II** : *Suppression des demi-torsions en nombre pair*

La seconde opération est intrinsèque à l'étoffe : sur un même ruban les demi-torsions consécutives en nombre pair peuvent être supprimées. Cette **homotopie du bord** défait le nœud (extrinsèque) mais conserve les caractéristiques intrinsèques.

Ainsi un ruban à un nombre pair de demi-torsions (un nombre entier de torsions) est intrinsèquement équivalent à un ruban sans demi-torsion, comme de la rouennerie les effets de relief :



Fig. 21

Un ruban à un nombre impair de demi-torsions est équivalent à un ruban à une seule demi-torsion.



Fig.22

L'opération II conserve les caractéristiques intrinsèques (type d'orientabilité, caractéristique d' Euler, nombre de composants, genre), on est donc tout-à-fait autorisé à effectuer l'opération II lors de la recherche de la surface intrinsèque.

Mais cette "homotopie du bord" demande à être précisée : par quel tour réussit-on à défaire deux croisements de même torsion sur un ruban (dont les extrémités sont fixes bien sûr !) ?

Il me semble que "l'homotopie du bord" fait appel aux notions (délicates) d'immersion et de plongement évoquées notamment par les divers travaux de J.-P. Petit (retournement de la sphère, surface de Boy etc.).

En transposant ce qui est dit à propos du plan projectif que l' "on ne peut pas plonger dans l'espace à trois dimensions", qu'il y a "immersion", on pourrait également dire qu'il est impossible de "plonger" un noeud dans un plan.

On peut en faire une projection et recevoir son ombre sur la surface, mais on ne peut pas le dessiner sans que le trait ne s'interrompe ou qu'il n'y ait une retraversée du trajet.

(En revanche, il est tout à fait possible de plonger (je dis "inscrire") le noeud trèfle, par exemple, sur le tore sans que le tracé ne se recoupe).

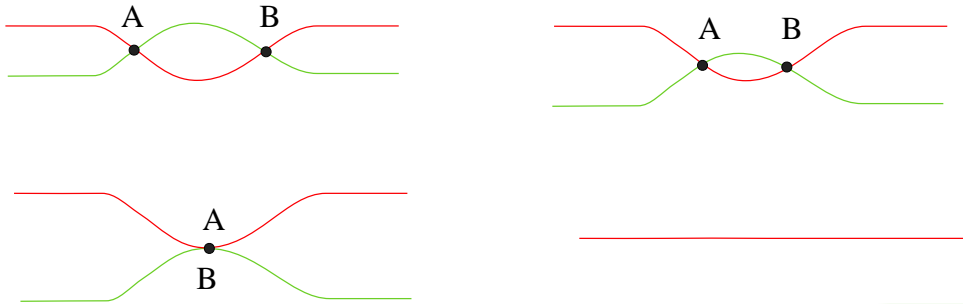
Lorsqu'on projette un noeud sur le plan, il y aurait donc des "*points* d'immersion" ou d'autotraversée, comme il y a des "*lignes* d'immersion" ou d'autotraversée dans le cas des surfaces. Les croisements de l'ombre sont, alors, considérés comme des points d'immersion.

Bien que l'ombre du noeud, sans autre indication, ne permette pas de distinguer les dessus-dessous, il est néanmoins possible de déterminer (par un petit calcul) la caractéristique d'Euler et le genre de chaque réseau du noeud. Ces paramètres sont indépendants des dessus-dessous, ils ne dépendent que des différents réseaux du noeud et conduisent directement à la surface intrinsèque correspondant à chacun des réseaux. Voir les exemples dans le Mémo 3.4

La question de l' "homotopie du bord" est donc entièrement éludée si on fait appel à quelques formules mathématiques très simples d'utilisation.

La question subsiste néanmoins si l'on veut obtenir la surface intrinsèque par le dessin uniquement.

Considérons, donc deux points d'immersion voisins sur une même bande du carrefour de bandes et faisons glisser ces deux points l'un vers l'autre pour finir par faire tangenter les courbes et les séparer complètement. (On imagine une projection du 2ème mouvement de Reidemeister)



Les points A et B se sont évanouis.

Fantastique, non?

cf "les anneaux magiques des prestidigitateurs" retournement de la sphère J.-P. Petit

